Curs 8

2.2 Punctul material legat

Punctul material liber are în spațiu 3 GL și în plan 2 GL. Legăturile aplicate punctului suprimă din gradele sale de libertate astfel că el are restricții de mișcare, sau este fixat atunci când legăturile suprimă toate gradele de libertate. Legăturile aplicate punctului sunt: suprafață, curba, firul sau bara.

Problema fundamentală a staticii punctului material legat este următoarea:
Se dă punctul material, forțele care acționează pe el și legăturile la care este supus. Se cere să se determine parametrii care determină poziția (pozițiile) sa de echilibru și reacțiunile legăturilor.

2.2.1 **Punct material pe o suprafață lucie**

Considerăm un punct material aflat pe o suprafață lucie de ecuație $f(x, y, z) = 0$, dată în forma implicită. Punctul este acționat de un sistem de forte concurente $\vec{F}_i$. Suprafața suprimă punctului un GL și anume posibilitatea de mișcare pe direcția normalei. Cele două GL ramase sunt deplasările pe două axe din planul tangent la suprafață.

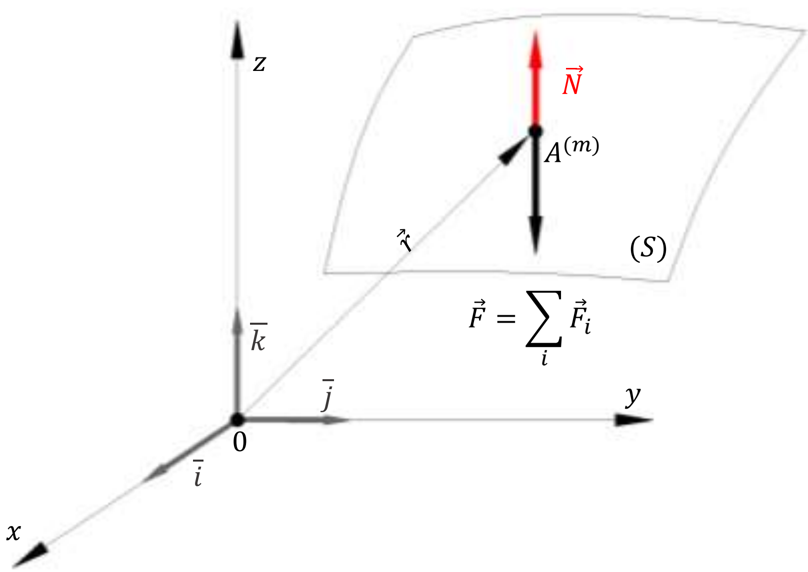

Figura 1 – Punct material pe o suprafață lucie

Conform axiomei existentei forțelor de legătură, din punct de vedere mecanic, suprafața este echivalentă cu o forță de legătură (reacțiune) $\vec{N}$, pe direcția normală, care acționează și ea asupra punctului material.
Aplicând axioma eliberării de legături punctul material poate fi considerat liber aflat sub acțiunea forțelor date $\vec{F_i}$ și a reacțiunii $\vec{N}$.
Aplicând teorema fundamentală a staticii rezultă ecuația vectorială de echilibru:

$$\vec{N} + \vec{R} = \vec{0} \quad (1)$$
$$\vec{N} = \lambda\, grad\, f$$
$$grad\, f = \frac{\delta f}{\delta x}\vec{\imath} + \frac{\delta f}{\delta y}\vec{\jmath} + \frac{\delta f}{\delta z}\vec{k}$$
$$\lambda\, grad\, f + \vec{R} = \vec{0} \quad (2)$$

gradientul este un vector ale cărui componente sunt derivatele parțiale ale lui f și are direcția normală la suprafață f.
Scriind expresiile analitice ale vectorilor din ecuația (2) rezultă:

$$\vec{N} = \lambda\left(\frac{\delta f}{\delta x}\vec{\imath} + \frac{\delta f}{\delta y}\vec{\jmath} + \frac{\delta f}{\delta z}\vec{k}\right)$$
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i} = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}$$
$$\lambda\left(\frac{\delta f}{\delta x}\vec{\imath} + \frac{\delta f}{\delta y}\vec{\jmath} + \frac{\delta f}{\delta z}\vec{k}\right) + R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k} = \vec{0} \quad (3)$$

proiectând ecuația vectorială de echilibru (3) pe axele reperului cartezian rezultă ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} \lambda\dfrac{\delta f}{\delta x} + R_x = 0 \\ \lambda\dfrac{\delta f}{\delta y} + R_y = 0 \\ \lambda\dfrac{\delta f}{\delta z} + R_z = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (4), rezultă coordonatele poziției de echilibru a punctului material pe suprafața $f\ \ x_o, y_o, z_o$ și mărimea reacțiunii $|\vec{N}|$:

$$|\vec{N}| = \lambda\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x=x_o} + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{y=y_o} + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)^2_{z=z_o}}$$

Împărțind succesiv primele 3 ecuații din sistemul (4) cu $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z}$ rezultă o altă forma a ecuațiilor carteziene de echilibru:

$$\frac{R_x}{\frac{\delta f}{\delta x}} = \frac{R_y}{\frac{\delta f}{\delta y}} = \frac{R_z}{\frac{\delta f}{\delta z}} = -\lambda \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = 0$$

Dacă ecuația suprafeței este dată în forma explicită:

$z = \varphi(x, y),$

atunci

$$\varphi(x, y) - z = 0$$

$$grad\ f = \frac{\delta\varphi}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\vec{j} - \vec{k}$$

$$\begin{cases} \frac{R_x}{\frac{\delta\varphi}{\delta x}} = \frac{R_y}{\frac{\delta\varphi}{\delta y}} = -R_z = -\lambda \\ z = \varphi(x, y) \end{cases} \qquad (6)$$

$$\lambda = R_z$$

Rezolvând sistemul de ecuații (6), rezultă necunoscutele problemei coordonatele poziției de echilibru a punctului material pe suprafața $f\ \ x_o, y_o, z_o$ și mărimea reacțiunii $|\vec{N}|$:

$$|\vec{N}| = \lambda\sqrt{\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)^2_{x=x_o} + \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)^2_{y=y_o} + 1}$$

2.2.2 **Punct material pe o curbă lucie**

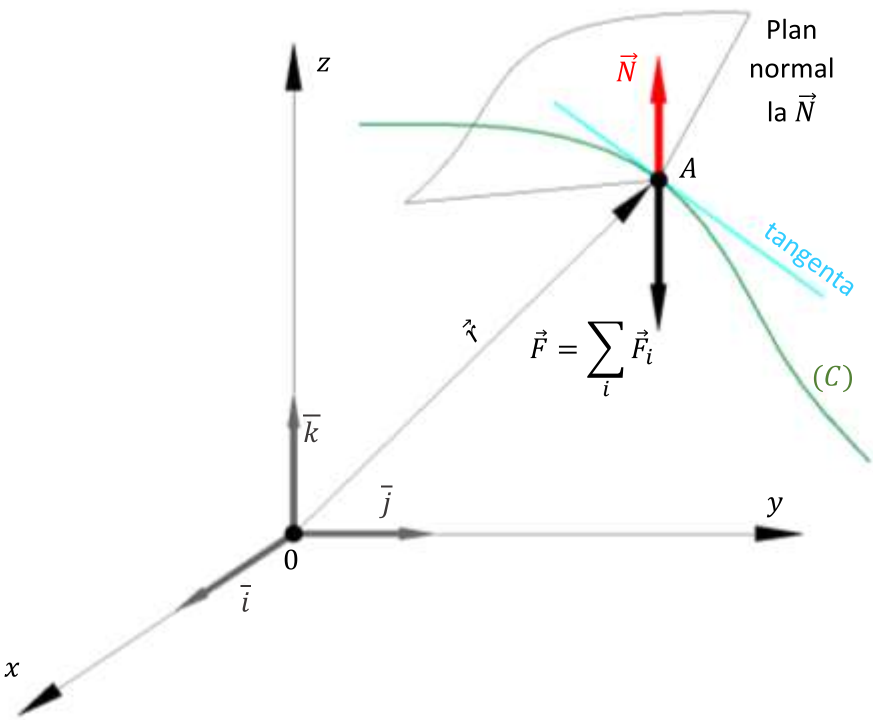

Figura 2 – Punct material pe o curbă lucie

Considerăm un punct material aflat pe o curbă lucie (C), de ecuații:

$f_1(x, y, z) = 0$

$f_2(x, y, z) = 0,$

date în forma implicită. Curba (C) reprezintă intersecția suprafețelor f_1 și f_2. Punctul este acționat de un sistem de forțe concurente $\vec{F}_i$. Curba suprimă punctului două GL și anume posibilitatea de deplasare în planul său normal. Gradul de libertate rămas reprezintă deplasarea pe tangenta la curbă.

Conform axiomei existentei forțelor de legătură, din punct de vedere mecanic, curba este echivalentă cu o forță de legătură (reacțiune) $\vec{N}$, cuprinsă în planul normal , care acționează și ea asupra punctului material.
Aplicând axioma eliberării de legături punctul material poate fi considerat liber aflat sub acțiunea forțelor date $\vec{F}_i$ și a reacțiunii $\vec{N}$.
Aplicând teorema fundamentală a staticii rezultă ecuația vectorială de echilibru:

$$\vec{N} + \vec{R} = \vec{0} \qquad (7)$$

$$\vec{R} \quad = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = R_x \vec{\imath} + R_y \vec{\jmath} + R_z \vec{k}$$

$$\vec{N} = \lambda_1 \; grad \; f_1 + \lambda_2 \; grad \; f_2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta x} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta x} + R_x = 0 \\ \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta y} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta y} + R_y = 0 \\ \lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta z} + \lambda_2 \frac{\delta f_2}{\delta z} + R_z = 0 \\ f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (8) rezultă coordonatele poziției de echilibru a punctului material pe curba (C) x_o, y_o, z_o și mărimea reacțiunii $|\vec{N}|$:

$$\vec{N} = \sqrt{\lambda_1^2 (\mathrm{grad} f_1)^2{}_{(x_o,y_o,z_o)} + \lambda_2^2 (\mathrm{grad} f_2)^2{}_{(x_o,y_o,z_o)} + 2\lambda_1 \lambda_2 (\mathrm{grad} f_1)(\mathrm{grad} f_2) \quad {}_{(x_o,y_o,z_o)}}$$

Dacă ecuația curbei (C) este dată în forma explicită:

$$\begin{cases} z = \varphi_1(x,y) \\ z = \varphi_2(x,y) \end{cases} \qquad (9)$$

Ele se pun sub forma:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) - z = 0 \\ \varphi_2(x,y) - z = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Mai departe se ține seama de următoarele relații:

$$grad \; f_1 = \frac{\delta \varphi_1}{\delta x} \vec{\imath} + \frac{\delta \varphi_1}{\delta y} \vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$grad \; f_2 = \frac{\delta \varphi_2}{\delta x} \vec{\imath} + \frac{\delta \varphi_2}{\delta y} \vec{\jmath} - \vec{k}$$

și se scriu ecuațiile scalare de echilibru conform relațiilor (8).

3. Statica corpului solid rigid (CSR) liber

Corpul solid rigid are, în mecanica, doua modele fizice.

a. sistem de puncte materiale, în care CSR este privit ca o mulțime de puncte materiale legate intre ele prin forte de interacțiune. în acest caz CSR este divizibil pana la nivelul punctului material.
b. Continuu material, în care CSR este o masa continua de materie, infinit divizibila

Proprietatea de rigiditate presupune ca distanta dintre doua puncte ce aparțin corpului este invariabila în raport cu poziția sa, sau ca CSR este indeformabil.

3.1 Corp solid rigid liber

Grade de libertate

Numărul gradelor de libertate ale CSR este egal cu numărul parametrilor geometrici independenți necesari determinării poziției sale în spațiu sau în plan. Considerând primul model fizic al CSR , pentru a determina poziția sa în spațiu este suficient sa se cunoască poziția a 3 puncte necoliniare ce aparțin CSR.

Cunoscând coordonatele celor 3 puncte $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3)$ se pot determina coordonatele oricărui punct $A_i(x_i, y_i, z_i)$ ce aparține corpului, dacă se cunosc distanțele $l_{i,1} = A_iA_1, l_{i,2} = A_iA_2, l_{i,3} = A_iA_3$,

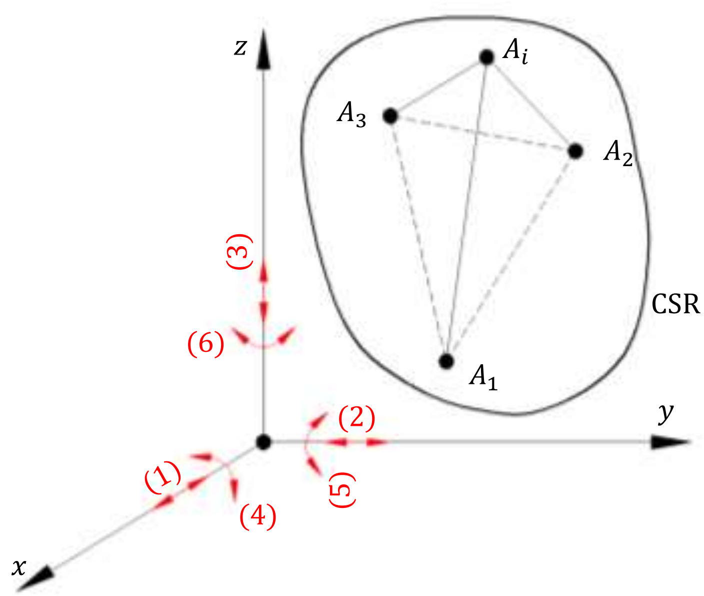

Figura 1 Corp solid rigid (CSR) în spațiu

$$\begin{cases}(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 + (z_i - z_1)^2 = l_{i,1}^2 \\ (x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2 + (z_i - z_2)^2 = l_{i,2}^2 \\ (x_i - x_3)^2 + (y_i - y_3)^2 + (z_i - z_3)^2 = l_{i,3}^2\end{cases}$$

Parametrii:

$$x_1, y_1, z_1$$

$$x_2, y_2, z_2$$

$$x_3, y_3, z_3,$$

determină poziția CSR în spațiu. Acești parametri nu sunt independenți, între ei există 3 relații de legătură date de distanțele dintre cele 3 puncte.

$$l_{1,2} = A_1A_2,\ l_{2,3} = A_2A_3, l_{1,3} = A_1A_3$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l_{1,2}^2$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = l_{2,3}^2 \quad (12)$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = l_{1,3}^2$$

Astfel între cei 9 parametri sunt stabilite 3 relații, iar numărul gradelor de libertate ale CSR liber în spațiu este egal cu 6.

Aceste grade de libertate sunt 3 translații pe direcțiile celor 3 axe ale sistemului cartezian de referință, în ambele sensuri și 3 rotații în jurul acestor 3 axe în ambele sensuri.

Numărul gradelor de libertate ale CSR în plan se stabilește cunoscând coordonatele a două puncte ce aparțin corpului $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$:

$$\begin{matrix}(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 = l_{i,1}^2 \\ (x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2 = l_{i,2}^2\end{matrix} \quad (13)$$

Parametrii

$$x_1, y_1$$

$$x_2, y_2,$$

determină poziția CSR în plan. Acești parametri nu sunt independenți, între ei există o relație de legătură dată de distanța dintre cele 2 puncte:

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_{1,2}^2$ (14)

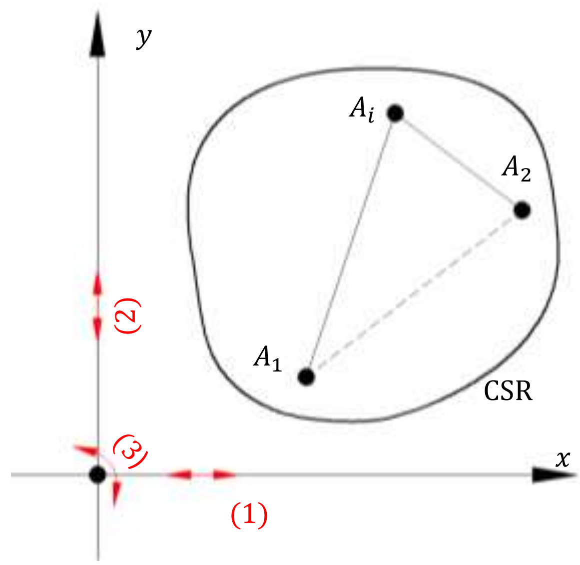

Figura 2 Corp solid rigid în plan(CSR)

Astfel între cei 4 parametri este stabilită o relație, iar numărul gradelor de libertate ale CSR liber în plan este egal cu 3.

Aceste grade de libertate sunt 2 translații pe direcțiile celor 2 axe ale sistemului cartezian de referință, în ambele sensuri și o rotație în jurul unei axe perpendiculare pe plan în ambele sensuri.

Problema fundamentală a staticii CSR liber este următoarea:

Se dă corpul și sistemul de forțe care acționează pe el. Se cere să se determine parametrii care determină poziția (pozițiile) sa de echilibru.

Rezolvarea problemei

Pentru rezolvarea problemei aplicăm teorema fundamentală a staticii.

CSR este acționat în general de un sistem de forte oarecare $\{\vec{F}_i\}$. Relația vectorială de echivalentă cu zero a unui sistem oarecare de forțe este:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_o = \vec{0} \end{cases} \quad (15)$$

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor din relația (15) rezultă ecuațiile scalare de echilibru:

$$
\begin{cases}
R_x = 0 \\
R_y = 0 \\
R_z = 0 \\
M_{ox} = 0 \\
M_{oy} = 0 \\
M_{oz} = 0
\end{cases} \qquad (16)
$$

Rezolvând acest sistem de ecuații obținem necunoscutele, care definesc poziția de echilibru a CSR.

Ecuațiile scalare de echilibru rezultă și din ecuațiile vectoriale:

$$
\begin{cases}
\vec{M}_1 = \vec{0} \\
\vec{M}_2 = \vec{0} \\
\vec{M}_3 = \vec{0}
\end{cases} \qquad (17)
$$

Sau din relațiile:

$$
\begin{cases}
M_{\Delta_1} = \\
M_{\Delta_2} = \\
\quad \vdots \\
M_{\Delta_6} =
\end{cases} \qquad (18)
$$

Dacă CSR este acționat de un sistem de forțe coplanare atunci relațiile vectoriale de echilibru sunt:

$$
\begin{cases}
\vec{R} = \vec{0} \\
\vec{M}_o = \vec{0}
\end{cases} \qquad (19)
$$

Dacă planul xOy este planul forțelor, proiectând relațiile (19) pe cele trei axe avem:

$$
\begin{cases}
R_x = 0 \\
R_y = 0 \\
M_{oz} = 0
\end{cases} \qquad (20)
$$

ecuațiile scalare de echilibru rezultă și din ecuațiile vectoriale:

$$
\begin{cases}
\vec{M}_1 = \vec{0} \\
\vec{M}_2 = \vec{0} \\
\vec{M}_3 = \vec{0}
\end{cases} \qquad (21)
$$

Sau din relațiile:

$$\begin{cases} M_A = 0 \\ M_B = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

Dacă CSR este acționat de un sistem de forțe paralele atunci relațiile vectoriale de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_o = \vec{0} \end{cases} \qquad (23)$$

Dacă axa 0z este direcția comună a forțelor, proiectând relațiile (23) pe cele trei axe rezultă ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} R_z = 0 \\ M_{ox} = 0 \\ M_{oy} = 0 \end{cases} \qquad (24)$$